

## Versuch 3

### Entwurf eines $H_\infty$ -Reglers für eine Dreitankeanlage mit dem S/KS/T-Verfahren

#### Einführung

In diesem Versuch soll eine Füllstandsregelung für ein 3-Tank-System entworfen und erprobt werden. Abb. 1 zeigt vereinfacht den Tankaufbau. Das System besteht aus drei Wasserbehältern, die durch quer liegende Ausflusstutzen miteinander verbunden sind. Mit jeweils einer Pumpe kann Wasser in Behälter 1 und in Behälter 3 gepumpt werden. Der dritte Behälter besitzt einen Abfluss, aus dem das Wasser mit der Flussrate  $Q_{30}$  in ein Sammelbecken fließt. Die Flussraten  $Q_{12}$  und  $Q_{23}$  zwischen den Behältern und die Abflussrate  $Q_{30}$  aus Behälter 3 hängen von den Füllstandshöhen ( $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$ ) der einzelnen Tanks ab.

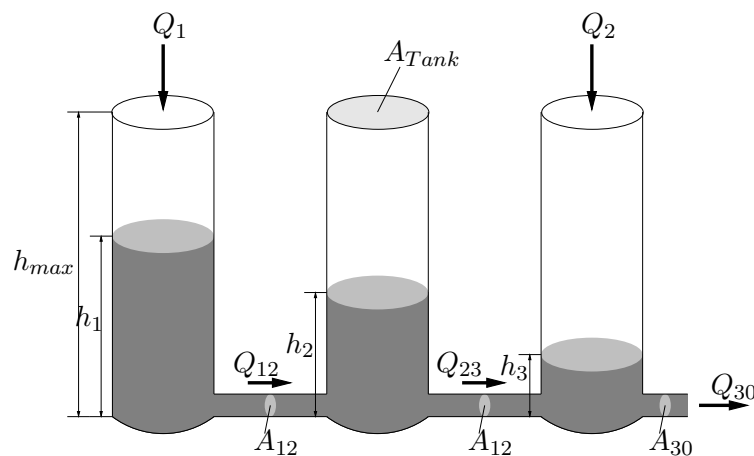


Abb. 1: Schematischer Aufbau des Drei-Tank-Systems

Die Regelungsaufgabe besteht darin, die drei Füllstände  $h_1$ ,  $h_2$  und  $h_3$  mit Hilfe der Pumpenraten  $Q_1$  und  $Q_2$  auf vorgegebene Sollwerte zu regeln. Dabei können die aktuellen Füllstandshöhen in Tank 1 und 3 über Drucksensoren gemessen werden. Als Regler soll ein nach dem S/KS/T-Verfahren entworfener  $H_\infty$ -Regler verwendet werden. Dieser soll in der Lage sein, sowohl die starken Stellgrößenbeschränkungen (siehe Tabelle 1) zu berücksichtigen als auch nicht verschwindende Störungen auszuregulieren. Außerdem soll der geschlossene Regelkreis robust gegenüber auftretenden unstrukturierten multiplikativen Modellfehlern sein.

# 1 Modellbildung

Mit Hilfe einer Volumenbilanz kann die zeitliche Änderung des Tankvolumens aus der Differenz von Zuflussrate und Abflussrate berechnet werden:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{zu} - Q_{ab}. \quad (1)$$

Weiterhin ist die Querschnittsfläche des Tanks  $A_{Tank}$  für alle Behälter zeitlich konstant. Somit kann die Berechnungsgleichung für Zylindervolumina  $V = Ah$  durch Ableitung in eine dynamische Gleichung der Form

$$\frac{dV}{dt} = A_{Tank} \frac{dh}{dt}. \quad (2)$$

umgewandelt werden. Nach dem Gesetz von Torricelli kann die Strömungsgeschwindigkeit zwischen zwei Behältern  $i$  und  $j$  wie folgt berechnet werden

$$\nu_{ij} = \text{sgn}(h_i - h_j) \sqrt{2g|h_i - h_j|}, \quad (3)$$

wobei  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  die Fallbeschleunigung ist. Die Signumfunktion legt dabei die Richtung der Flussgeschwindigkeit fest und ist wie folgt definiert:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0, \\ 0 & : x = 0, \\ -1 & : x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Analog zu (2) kann die Flussrate  $Q_{ij}$  zwischen Tank  $i$  und Tank  $j$  mit

$$Q_{ij} = A_{ij} \nu_{ij} \quad (5)$$

berechnet werden. Die Parameter der Strecke sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Tabelle 1: Parameter des Dreitanksystems

Beschreibung	Formelzeichen	Größe
Grundfläche der Tanks	$A_{Tank}$	154cm <sup>2</sup>
Querschnitt der Zuflussstutzen	$A_{12} = A_{23}$	0.25cm <sup>2</sup>
Querschnitt des Ausflusstuzens	$A_{30}$	0.4cm <sup>2</sup>
Maximale Füllhöhe des Tanks	$h_{max}$	55cm
Maximale Flussrate der Pumpe:	$Q_{1max} = Q_{2max}$	100 $\frac{ml}{s}$

## Aufgabe 1.1

Geben Sie eine sinnvolle Wahl des Zustandsvektors  $x \in \mathbb{R}^n$ , Eingangsvektors  $u \in \mathbb{R}^q$  und Ausgangsvektors  $y \in \mathbb{R}^p$  für das 3-Tank-System an und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung!

Stellen Sie das nichtlineare Modell des Dreitanksystems in der Zustandsraumdarstellung  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

mit der Ausgangsgleichung  $y(t) = Cx(t)$  auf!

### Aufgabe 1.2

Berechnen Sie die Ruhelage  $(x_s, u_s)$  des nichtlinearen Zustandsraummodells, welche zu den stationären Füllständen  $h_{1,s} = 45\text{cm}$ ,  $h_{2,s} = 30\text{cm}$ ,  $h_{3,s} = 15\text{cm}$  gehört. Geben Sie weiterhin den zu  $(x_s, u_s)$  gehörenden konstanten Ausgangsvektor  $y_s$  an. Lassen sich beliebige stationäre Zustände  $x_s$  mit einem konstantem Eingangsvektor  $u_s$  einstellen? Begründen Sie kurz Ihre Aussage!

### Aufgabe 1.3

Linearisieren Sie das nichtlineare Zustandsmodell um die in Aufgabe 1.2 berechnete Ruhelage  $(x_s, u_s)$  und schreiben sie es in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + B\mu(t), \\ \nu(t) &= C\xi(t) + D\mu(t).\end{aligned}\tag{6}$$

Stellen Sie außerdem die Übertragungsmatrix

$$G(s) \cong \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]\tag{7}$$

auf und geben Sie explizit den Zustandsvektor  $\xi$ , Eingangsvektor  $\mu$  und den Ausgangsvektor  $\nu$  des linearisierten Systems an!

## Störgrößenmodell

Als Ausgangsstörung des Regelkreises soll ein Leck im 3. Behälter des Tanksystems simuliert werden. Dafür wird ein zusätzliches Auslassventil am Boden dieses Behälters mit dem Durchmesser  $A_{30}$  geöffnet. Aus diesem Ventil fließt nun abhängig vom Füllstand  $h_3$  zusätzlich Wasser aus. Diese nichtlineare Störung soll approximativ über ein lineares Störgrößenmodell beschrieben werden. Dafür wird eine Übertragungsmatrix  $G_d(s)$  berechnet, welche, wie in Abb. 3 gezeigt, den Einfluss der Abstandsvariable des Eingangs  $\eta(t) = h(t) - h_s$  auf die Abstandsvariable der Ausgangsstörung  $\delta(t) = d(t) - d_s$  beschreibt. Dabei ist  $h(t)$  eine Sprungfunktion welche genau dann von 0 auf 1 springt wenn sich das Leck "plötzlich" öffnet und  $h_s = 0$  ist da angenommen wird, dass das Leck in der Ruhelage nicht vorhanden ist.

Als neuen (gestörten) Ausgang des linearisierten Modells ergibt sich analog zu Abb. 3

$$\nu'(s) = \nu(s) + \delta(s) = G(s)\mu(s) + G_d(s)\eta(s)\tag{8}$$

### Aufgabe 1.4

Stellen Sie das nichtlineare Modell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \tilde{f}(x(t), u(t), h(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{9}$$

auf, welches die Dynamik des Tanksystem mit Leck beschreibt. Linearisieren Sie anschließend Gleichung (9) zu

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + B\mu(t) + B_d\eta(t), \\ \nu'(t) &= C\xi(t).\end{aligned}\tag{10}$$

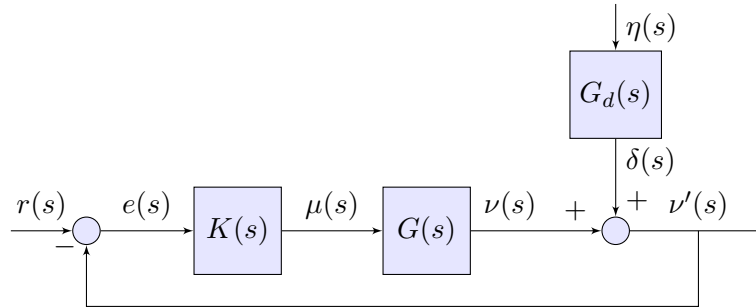


Abb. 2: Standardregelkreis mit Ausgangsstörung

um die Ruhelage  $(x_s, u_s, h_s)$ , wobei  $(x_s, u_s)$  aus Aufgabe 1.2 übernommen werden kann und  $h_s = 0$  ist. Berechnen Sie mit Hilfe von (10) die in (8) verwendete Störübertragungsmatrix  $G_d(s)$  und stellen Sie beide Komponenten von  $G_d(s)$  in einem Bodediagramm dar!

### Unstrukturierte multiplikative Modellfehler

Wie in Abb. 1 schematisch gezeigt, sind die Einlassventile sehr weit oben an den Behältern angebracht. Dadurch trifft der eingehende Wasserstrahl mit relativ großer Energie auf die Wasseroberfläche und erzeugt damit Schwingungen der Wasseroberfläche in Behälter 1 und 3 die sich auch in der Messung der Füllstände  $h_1$  und  $h_3$  wiederfinden. Dieses vernachlässigte Verhalten soll nun als multiplikativer Modellfehler  $\Delta_M$  modelliert werden.

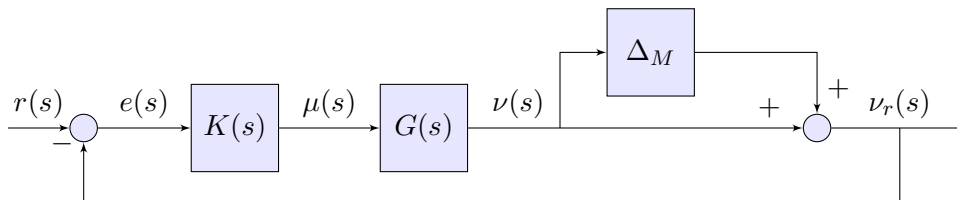


Abb. 3: Standardregelkreis mit unstrukturierter multiplikativer Fehlermatrix  $\Delta_M$

Dabei wird den Elementen der Übertragungsmatrix (7), welche den Einfluss der Eingänge  $\mu_1, \mu_2$  auf die Ausgänge  $\nu_1$  und  $\nu_3$  beschreiben, ein gebrochen rationaler Faktor mit einem konjugiert komplexen Polpaar hinzugefügt. Damit ergibt sich die fehlerbehaftete Übertragungsmatrix zu

$$G_r = \begin{pmatrix} G_{11} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\delta\omega s + \omega^2} & G_{12} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\delta\omega s + \omega^2} \\ G_{31} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\delta\omega s + \omega^2} & G_{32} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\delta\omega s + \omega^2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Der gebrochen rationale Faktor  $\frac{\omega^2}{s^2 + 2\delta\omega s + \omega^2}$  mit  $\delta < 1$  beschreibt dabei eine gedämpfte harmonische Schwingung, die sich im Zeitbereich als zusätzlicher additiver Term der Form  $Ae^{-at} \sin(bt)$  im fehlerbehafteten Ausgangssignal  $y_r(t)$  wiederfinden lässt. Es sei darauf hingewiesen, dass die fehlerbehaftete Übertragungsmatrix  $G_r$  das gleiche stationäre Verhalten aufweisen muss wie das nominelle Modell  $G(s)$ . Deshalb wurde der zusätzliche Term so gewählt, dass  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{s^2 + 2\delta\omega s + \omega^2} = 1$  gilt. In diesem Versuch wurde die Dämpfung zu  $\delta = 0.5$  und die Frequenz zu  $\omega = 10$  festgelegt.

### Aufgabe 1.5

Modellieren Sie die zusätzlich gemessenen Schwingungen der Wasseroberfläche mit Hilfe der fehlerbehafteten Übertragungsmatrix (11) als unstrukturierte multiplikative Fehlermatrix  $\Delta_M$  und geben sie eine frequenzabhängige obere Schranke  $l_m(w)$  dieses Modellfehlers an!

Stellen Sie den maximalen Singulärwert der Fehlermatrix  $\bar{\sigma}[\Delta_M(j\omega)]$  und dessen obere Schranke  $l_m(w)$  in einem Bodediagramm dar!

## 2 Entwurf des $H_\infty$ -Reglers

Der  $H_\infty$ -Reglerentwurf soll mit dem S/KS/T-Verfahren durchgeführt werden. Der so entworfene Regelkreis soll dabei die zuvor spezifizierten Störungen ausregeln und robust gegenüber den angegebenen unstrukturierten multiplikativen Modellfehlern sein.

### S/KS/T-Entwurf

Der  $H_\infty$ -Reglerentwurf nach dem S/KS/T-Verfahren ist ein optimierungsbasiertes Reglerentwurfsverfahren, welches auch als “Closed Loop Shaping” bezeichnet wird. Dabei gibt man gewünschte Singulärwertverläufe charakteristischer Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises vor und berechnet daraus einen Regler der den Regelkreis so gut wie möglich auf diese vorgegebenen Verläufe zwingt (Vgl. [1], S.299ff). Wie der Name “S/KS/T-Verfahren” schon andeutet, gibt man im allgemeinen die Singulärwertverläufe der Sensitivitätsmatrix  $S(s)$ , der komplementären Sensitivitätsmatrix  $T(s)$  und der Übertragungsmatrix  $K(s)S(s)$  vor. Dabei sollen diese Singulärwertverläufe so gewählt werden, dass der geschlossene Regelkreis folgende Anforderungen erfüllt:

- Der Regelkreis soll stabil sein.
- Die Stabilität des Regelkreises soll robust gegenüber den angegebenen unstrukturierten multiplikativen Modellfehlern sein.
- Wenn die Regelung mit leerem Tank gestartet wird, soll nach 10 Minuten nur noch eine Regelabweichung von  $2cm$  auftreten.
- Die auftretenden Störungen sollen innerhalb von 5 Minuten so ausgeregelt werden, dass noch eine Regelabweichung von  $2cm$  auftritt.
- Die Stellgrößenbeschränkungen sollen mit einer Toleranz von 20% eingehalten werden und es sollen keine hochfrequenten Stellsignale auftreten.

### Aufgabe 2.1

Formulieren Sie die Regelungsaufgabe als S/KS/T-Problem! Stellen Sie dafür das zu minimierende Kostenfunktional auf und zeichnen Sie den verallgemeinerten Regelkreis, dessen Übertragungsfunktion minimiert wird!

### Aufgabe 2.2

Wählen Sie die Gewichtungsmatrizen  $W_S$ ,  $W_{KS}$  und  $W_T$  so, dass die Singulärwertverläufe der Matrizen  $S(s)$ ,  $T(s)$ ,  $K(s)S(s)$  die gegebenen Spezifikationen erfüllen. Nehmen Sie dafür an, dass die Gewichtungsmatrix der Störung  $W_i$  eine Einheitsmatrix entsprechender Dimension ist. Erläutern Sie die Wahl der Gewichtungsmatrizen ausführlich (ggf. auch grafisch)!

Führen Sie anschließend den Reglerentwurf durch Lösen des  $H_\infty$ -Standardproblems mit der Funktion

$h_{\text{inf}}$  in Scilab durch. Analysieren Sie den entworfenen Regelkreis, indem Sie die Singularwertverläufe von  $S(s)$ ,  $T(s)$  und  $K(s)S(s)$  grafisch darstellen. Nutzen Sie dafür die auf der Webseite zur Verfügung gestellte Funktion `sigma.sce`. Überprüfen Sie, ob der entworfene Regelkreis ihren Wünschen bezüglich der maximalen Singularwerte entspricht!

### 3 Simulation des Reglers

Um den entworfenen Regler simulativ zu testen, wird die Simulationsumgebung `Scicos` verwendet. Dort wird sowohl die nichtlineare Dynamik des Dreitanksystems als auch der entworfene Regler implementiert. Mit dieser Simulation kann anschließend das Führungs- und Störverhalten des Regelkreises simuliert und damit die Regelgüte in beiden Fällen überprüft werden.

#### Aufgabe 3.1

Implementieren Sie das aufgestellte nichtlineare Modell des Dreitanksystems aus Aufgabe 1.1 in `Scicos`! Benutzen Sie dafür den `Scicos`-Block `GENERIC`.

#### Aufgabe 3.2

Implementieren Sie den in Aufgabe 2.4 entworfenen Regler in `Scicos` und schließen Sie ihn an das nichtlineare Modell aus Aufgabe 3.1 an. Beachten Sie dabei die Umrechnung der Ein- und Ausgänge zwischen linearem Regler und nichtlinearem Modell und integrieren Sie die Stellgrößenbeschränkung in Ihre Simulation. Simulieren Sie nun das Einschwingverhalten des Regelkreises, indem Sie die Simulation mit leerem Tank starten und zu den stationären Füllständen  $h_{1,s} = 45\text{cm}$ ,  $h_{2,s} = 30\text{cm}$ ,  $h_{3,s} = 15\text{cm}$  fahren. Achten Sie darauf, dass die Spezifikationen eingehalten werden und passen Sie gegebenenfalls den Reglerentwurf an um dies zu erreichen!

#### Aufgabe 3.3

Es soll nun das Störverhalten des Regelkreises untersucht werden. Implementieren Sie dafür das nichtlineare Modell des Dreitanksystems mit Störung aus Aufgabe 2.1 in `Scicos`! Benutzen Sie dafür den `Scicos`-Block `GENERIC` und modellieren Sie die Funktion  $h(t)$  in (9) als zusätzlichen Eingang.

#### Aufgabe 3.4

Schließen Sie den Regler aus Aufgabe 3.2 an den in Aufgabe 3.3 implementierten `GENERIC`-Block an und beachten Sie wiederum die Umrechnung der Ein- und Ausgänge zwischen linearem Regler und nichtlinearem Modell. Integrieren Sie außerdem die Stellgrößenbeschränkung in Ihre Simulation. Simulieren Sie das Störverhalten des Regelkreises, indem Sie die Simulation in der Ruhelage starten und nach 10 Sekunden einen Sprung der Höhe 1 auf den Störeingang  $h(t)$  geben. Achten Sie darauf, dass die Spezifikationen eingehalten werden und passen Sie gegebenenfalls den Reglerentwurf an um dies zu erreichen!

## 4 Versuchsdurchführung

#### Aufgabe 4.1

Implementieren Sie den entworfenen Regler am Versuchsstand. Beachten Sie dabei die Maßeinheiten der realen Signale und die Umrechnung der Ein- und Ausgänge zwischen linearem Regler und realem Dreitanksystem. Realisieren Sie zuerst das Befüllen der Tanks auf die stationären Füllständen

$h_{1,s} = 45\text{cm}$ ,  $h_{2,s} = 30\text{cm}$ ,  $h_{3,s} = 15\text{cm}$ . Simulieren Sie anschließend die Störung durch Öffnen eines zusätzlichen Auslassventils am dritten Behälter. Tun Sie dies erst, wenn sich das System in der Ruhelage befindet. Nehmen Sie Messreihen zur Untersuchung des Führungs- und Störverhalten dieses Regelkreises auf. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihrer Simulation.

## Literatur

- [1] Raisch, J.; *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*; R. Oldenburg Verlag, 1994.
- [2] Anderson, B.; Moore, J.: *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, 1990.<sup>1</sup>
- [3] Ludyk, G.: *Theoretische Regelungstechnik 2*. Springer, 1995.
- [4] Föllinger, O.: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 8. Aufl., Hüthig, 1994.
- [5] Lunze, J. : *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 4. Aufl., Springer, 2006. <sup>2</sup>
- [6] Bryson, A .; Ho Y. : *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*. Hemisphere Pub. Corp., 1981.

---

<sup>1</sup>Wiederauflage durch Dover Publications, 2007

<sup>2</sup>als E-Book in der Universitätsbibliothek zugänglich