Das Direct Nyquist Array-Entwurfsverfahren – Mehrgrößenregelung eines Heißluftgebläses

Praktikum – Mehrgrößenregelsysteme, WS 2011/2012

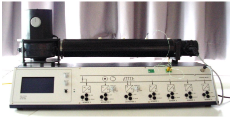
Johannes Schiffer [1]

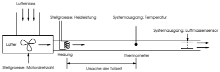
Fachgebiet Regelungssysteme
Technische Universität Berlin
GERMANY

[1]Die Ausarbeitung des Foliensatzes geht auf die Arbeit von Stephanie Geist zurück.

Inhalt

Anwendungsbeipiel: Heißluftgebläse





Regelgrößen:

- Temperatur
- Luftstrom

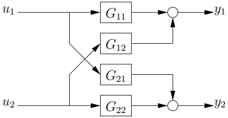
Stellgrößen:

- Motordrehzahl des Lüfters
- Heizleistung

interne **Kopplungen** zwischen Stell- und Regelgrößen

Modell

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$



experimentelle **Prozessidentifikation**:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.482}{0.4793+s} e^{-sT_{y1}} & \frac{0.4532}{0.7779+s} e^{-sT_{y1}} \\ \frac{2.9465}{1.5005+s} e^{-sT_{y2}} & \frac{0.0976}{4+s} e^{-sT_{y2}} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} \textit{Motordrehzahl} \\ \textit{Heizleistung} \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} \textit{Temperatur} \\ \textit{Luftstrom} \end{bmatrix}$$

Padé-Approximation

reell-rationale Approximation von e^{-sT}

Exponentialfkt. kann als unendliche Potenzreihe geschrieben werden:

$$e^{-sT} = 1 - Ts + \frac{T^2}{2}s^2 - \dots \tag{1}$$

Ansatz für eine Padé-Approximation 1. Ordnung:

$$P_1(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} \tag{2}$$

Koeffizientenvergleich von (1) und (2) ergibt:

$$b_0 = a_0 \tag{3}$$

$$b_1 = 1 - Ta_0 \tag{4}$$

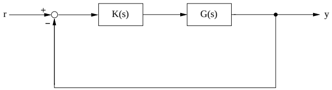
$$a_0 = \frac{2}{T} \tag{5}$$

Padé-Approximation 1. Ordnung

$$P_1(s) = \frac{-s+\frac{2}{T}}{s+\frac{2}{T}} = \frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}$$

Inhalt

Standardregelkreis



Annahmen:

- $K(s)$ - propere $q \times p$-Übertragungsmatrix
- $G(s)$ - propere $p \times q$-Übertragungsmatrix
- (G, K) sinnvoll konfiguriert („well posed"), d.h.

$$\det\left(I + G(\infty)K(\infty)\right) \neq 0$$

Wiederholung: Charakteristische Ortskurven

Definition (Charakteristische Ortskurven des offenen Kreises)

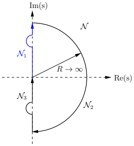
Unter den charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises versteht man die Nyquist-Ortskurven der Eigenwerte

$$\lambda_{Q_i}(s) := \lambda_i[Q(s)], \quad s \in \mathcal{N}_1, \quad i = 1, \dots, p$$

der Übertragungsmatrix

$$Q(s) := G(s)K(s).$$

Nyquist-Kontur:



Wiederholung: Verallgemeinertes Nyquist-Kriterium

Satz (Verallgemeinertes Nyquist-Kriterium)

Besitzen $G(s)$ und $K(s)$ m_G bzw. m_K Pole auf oder rechts der imaginären Achse, so ist der Regelkreis (G, k) genau dann asymptotisch stabil, wenn die charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises

1. *nicht durch den Punkt $(-1, 0)$ gehen und*
2. *zusammen eine Phasendrehung von $\pi(m_G + m_K)$ bezüglich des kritischen Punkt $(-1, 0)$ haben.*

Verallgemeinerte Diagonaldominanz

Satz

$A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ sei nichtreduzierbar. A ist genau dann **verallgemeinert diagonaldominant**, *wenn für den Perron-Frobenius-Eigenwert der „Vergleichsmatrix“*

$$C_V(A) := \begin{bmatrix} 0 & \left|\frac{a_{12}}{a_{22}}\right| & \dots & \left|\frac{a_{1p}}{a_{pp}}\right| \\ \left|\frac{a_{21}}{a_{11}}\right| & 0 & \dots & \left|\frac{a_{2p}}{a_{pp}}\right| \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \left|\frac{a_{p1}}{a_{11}}\right| & \left|\frac{a_{p2}}{a_{22}}\right| & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

gilt:

$$\lambda_{PF}[C_V(A)] < 1.$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} j & 1 \\ \frac{1}{2} & j+2 \end{bmatrix}$$

$$C_V(A) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 0.4729,$$
$$\lambda_2 = -0.4729$$

$$\lambda_{PF}[C_V(A)] = 0.4729 < 1$$

A ist verallgemeinert diagonaldominant.

Verallgemeinertes Gershgorin-Theorem

Satz (Verallgemeinertes Gershgorin-Theorem)

$A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ sei nichtreduzierbar. Sämtliche **Eigenwerte** *von A liegen in der* **Vereinigung von Kreisscheiben**

$$|s - a_{ii}| \le |a_{ii}|\lambda_{PF}[C_V(A)].$$

Stabilität bei verallgemeinert diagonaldominanter Rückführdifferenzenmatrix

Satz

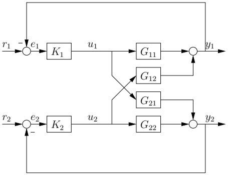
$I + G(s)K(s)$ sei verallgemeinert diagonaldominant für alle $s \in \mathcal{N}_1$. Der Regelkreis (G, K) ist genau dann **asymptotisch stabil**, *wenn die Summe der Phasendrehungen aller Diagonalelemente von $G(s)K(s)$ für $s \in \mathcal{N}_1$ bezüglich des kritischen Punktes $(-1, 0)$ $\pi(m_G + m_K)$ beträgt.*

Inhalt

Das Direct Nyquist Array-Entwurfsverfahren – Grundidee

- Entwurf eines Mehrgrößenreglers wird auf den Entwurf mehrerer Eingrößenregler zurückgeführt
- Querkopplungen werden durch Abschätzungen (verallg. Gershgorin-Bänder) berücksichtigt

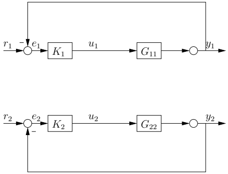
Regelkreisstruktur:



Das Direct Nyquist Array-Entwurfsverfahren – Grundidee

- Entwurf eines Mehrgrößenreglers wird auf den Entwurf mehrerer Eingrößenregler zurückgeführt
- Querkopplungen werden durch Abschätzungen (verallg. Gershgorin-Bänder) berücksichtigt

Entwurf:



Stabilität

Satz (Stabilität bei verallgemeinert diagonaldominanter Rückführdifferenzenmatrix)

$I + G(s)K(s)$ sei verallgemeinert diagonaldominant für alle $s \in \mathcal{N}_1$. Der Regelkreis (G, K) ist genau dann **asymptotisch stabil**, *wenn die Summe der Phasendrehungen aller Diagonalelemente von $G(s)K(s)$ für $s \in \mathcal{N}_1$ bezüglich des kritischen Punktes $(-1, 0)$ $\pi(m_G + m_K)$ beträgt.*

- Überdecken die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder von Q den kritischen Punkt nicht, so kann die tatsächliche Phasendrehung von λ_{Q_i} allein anhand der Ortskurven der Diagonalelemente q_{ii} abgelesen werden.
- Gilt $m_G + m_K = \sum_{i=1}^{p} m_{q_{ii}}$, kann auch die für die Stabilität geforderte Phasendrehung anhand von q_{ii} bestimmt werden.

$\Rightarrow$ Für die Stabilitätsuntersuchung können die außerhalb der Diagonalen stehenden Elemente vernachlässigt werden.

DNA-Entwurf

Vorteile

- **einfach** (wenn klassische SISO-Methoden bekannt sind)
- direkte Kontrolle über **Regler-Komplexität** und Reglerpole und -nullstellen (unerwünschte **Pol-Nullstellenkürzungen** können vermieden werden)
- **Modellfehler** in Einzelelementen lassen sich leicht berücksichtigen

Nachteile

- **Stellgrößenbeschränkungen** lassen sich schlecht berücksichtigen
- Kompensatorentwurf wird **für Strecken mit vielen Ein- und Ausgangsgrößen unübersichtlich**
- nur auf **verallgemeinert diagonaldominante** Strecken oder auf Strecken, für die sich leicht verallgemeinerte Diagonaldominanz erreichen lässt, anwendbar

DNA-Entwurf

Entwurfsschritte:

1. Herstellen verallgemeinerter Diagonaldominanz
2. Entwurf der Eingrößenregelkreise
3. ggf. Entwurf zusätzlicher Kompensationsmatrizen

DNA-Entwurf- 1. verallgemeinerte Diagonaldominanz

a) verallg. Gershgorin-Bänder müssen so schmal sein, dass Spezifikationen mithilfe von Eingrößenreglern erfüllt werden können
b) alle auf oder rechts der imaginären Achse liegenden Streckenpole treten in den Diagonalelementen auf:

$$m_G = \sum_{i=1}^{p} m_{g_{ii}}$$

- für quadratische Streckenmodelle: Überprüfung ob Bedingungen a) und b) **bereits erfüllt** werden
- Entwurf einer **Kompensationsmatrix** $K_c(s)$, so dass Bedingungen für kompensiertes Streckenmodell $G'(s) := G(s)K_c(s)$ erfüllt werden

DNA-Entwurf - 2. Entwurf Eingrößenregelkreise

- Auslegung der Hauptregelkreise (SISO), so dass
  a) Hauptregelkreise (g'_{ii}, k_i) as. stabil
  b) verallg. Gershgorinbänder von $Q = G' diag\{k_i\}$ überdecken kritischen Punkt nicht
  c) Robustheit der Stabilität gegenüber Modellfehlern gewährleistet
  d) Hauptregelkreise zeigen gewünschtes Ein-/Ausgangsverhalten
- Gesamtregler: $K(s) := K_c(s) diag\{k_i\}$

DNA-Entwurf - 2. Entwurf Eingrößenregelkreise

Wahl der Reglerstruktur: **PI(D)**

$$K = K_{IR}\frac{(T_{D1}s+1)(T_{D2}s+1)}{s(Ts+1)}$$

Warum?

P
- Schnelligkeit
- erzeugt sofort korrigierende Stellgröße

I
- stationäre Genauigkeit (Strecke hat keinen I-Anteil)

D
- Schnelligkeit (kürzen einer weiteren langsamen Polstelle mgl)
- kann mit bestimmten Zeitkonstante die Phase lokal anheben
- ABER: Differenziation des Eingangssignals $\rightarrow$ Rauschen

Nutzen klassischer Eingrößen-Entwurfsverfahren möglich (WOK, Bode, Nyquist, ...)

Modellierung | Stabilität bei verallgemeinert diagonaldominanter Rückführdifferenzenmatrix | DNA-Entwurf

DNA-Entwurf - 2. Entwurf Eingrößenregelkreise

Wahl der Reglerstruktur: **PI(D)**

$$K = K_{IR}\frac{(T_{D1}s+1)(T_{D2}s+1)}{s(Ts+1)}$$

Warum?

P
- Schnelligkeit
- erzeugt sofort korrigierende Stellgröße

I
- stationäre Genauigkeit (Strecke hat keinen I-Anteil)

D
- Schnelligkeit (kürzen einer weiteren langsamen Polstelle mgl)
- kann mit bestimmten Zeitkonstante die Phase lokal anheben
- ABER: Differenziation des Eingangssignals $\rightarrow$ Rauschen

Nutzen klassischer Eingrößen-Entwurfsverfahren möglich (WOK, Bode, Nyquist, ...)

Johannes Schiffer | Direct Nyquist Array | 20

Modellierung | Stabilität bei verallgemeinert diagonaldominanter Rückführdifferenzenmatrix | DNA-Entwurf

DNA-Entwurf - 2. Entwurf Eingrößenregelkreise

Wahl der Reglerstruktur: **PI(D)**

$$K = K_{IR}\frac{(T_{D1}s+1)(T_{D2}s+1)}{s(Ts+1)}$$

Warum?

P
- Schnelligkeit
- erzeugt sofort korrigierende Stellgröße

I
- stationäre Genauigkeit (Strecke hat keinen I-Anteil)

D
- Schnelligkeit (kürzen einer weiteren langsamen Polstelle mgl)
- kann mit bestimmten Zeitkonstante die Phase lokal anheben
- ABER: Differenziation des Eingangssignals $\rightarrow$ Rauschen

Nutzen klassischer Eingrößen-Entwurfsverfahren möglich (WOK, Bode, Nyquist, ...)

Johannes Schiffer | Direct Nyquist Array | 20

Modellierung | Stabilität bei verallgemeinert diagonaldominanter Rückführdifferenzenmatrix | DNA-Entwurf

DNA-Entwurf - 2. Entwurf Eingrößenregelkreise

Wahl der Reglerstruktur: **PI(D)**

$$K = K_{IR}\frac{(T_{D1}s+1)(T_{D2}s+1)}{s(Ts+1)}$$

Warum?

P
- Schnelligkeit
- erzeugt sofort korrigierende Stellgröße

I
- stationäre Genauigkeit (Strecke hat keinen I-Anteil)

D
- Schnelligkeit (kürzen einer weiteren langsamen Polstelle mgl)
- kann mit bestimmten Zeitkonstante die Phase lokal anheben
- ABER: Differenziation des Eingangssignals $\rightarrow$ Rauschen

Nutzen klassischer Eingrößen-Entwurfsverfahren möglich (WOK, Bode, Nyquist, ...)

Johannes Schiffer | Direct Nyquist Array | 20

DNA-Entwurf - 2. Entwurf Eingrößenregelkreise

Wahl der Reglerstruktur: **PI(D)**

$$K = K_{IR}\frac{(T_{D1}s+1)(T_{D2}s+1)}{s(Ts+1)}$$

Warum?

P
- Schnelligkeit
- erzeugt sofort korrigierende Stellgröße

I
- stationäre Genauigkeit (Strecke hat keinen I-Anteil)

D
- Schnelligkeit (kürzen einer weiteren langsamen Polstelle mgl)
- kann mit bestimmten Zeitkonstante die Phase lokal anheben
- ABER: Differenziation des Eingangssignals $\rightarrow$ Rauschen

Nutzen klassischer Eingrößen-Entwurfsverfahren möglich (WOK, Bode, Nyquist, ...)

DNA-Entwurf - Übersicht

Bisher:

- Nutzen einer Permutationsmatrix K_a um Stellgrößenzuordnung geschickt zu wählen; verallgemeinerte Diagonaldominanz konnte erreicht werden
- Entwurf von Eingrößenreglern k_i für die Hauptregelkreise $G_{ii},\ i=1,2$
  mit $K_d = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$

Damit ergibt sich die offene Kette zu

$$Q(s) = \underbrace{G^*(s)K_a}_{G(s)} K_d$$

$\Rightarrow$ Regelkreis kann mit einer zusätzlichen Matrix K_c noch weiter entkoppelt werden.

DNA-Entwurf - Übersicht

Bisher:

- Nutzen einer Permutationsmatrix K_a um Stellgrößenzuordnung geschickt zu wählen; verallgemeinerte Diagonaldominanz konnte erreicht werden
- Entwurf von Eingrößenreglern k_i für die Hauptregelkreise $G_{ii},\ i=1,2$
  mit $K_d = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$

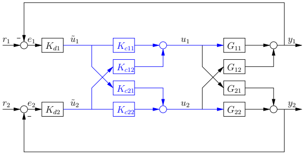
Damit ergibt sich die offene Kette zu

$$Q(s) = \underbrace{G^*(s)K_a}_{G(s)} K_c K_d$$

$\Rightarrow$ Regelkreis kann mit einer zusätzlichen Matrix K_c noch weiter entkoppelt werden.

DNA-Entwurf - 3. Entwurf Kompensationsmatrizen

Es gilt $Q(s) = \underbrace{G^*(s)K_a}_{G(s)} K_c K_d$



- quadratische Strecke besitzt naturgemäß schwache Querkopplungen (Gershgorin-Bänder sind bereits schmal genug), $K_c = I$
- **Konstante Kompensationsmatrix**, K_c reell
- **Dynamische Kompensationsmatrix**, $K_c(s) = Np(s)Mp^{-1}(s)$

DNA-Entwurf - 3. Entwurf Kompensationsmatrizen

In der Regel sollte die Kompensationsmatrix $K_c(s)$ möglichst "einfach" sein.

- Eine einfache Kompensationsmatrix führt auf einen Regler mit einfacher Struktur und Dynamik (Transparenz).
- Durch Beschränkung auf einfache Kompensationsmatrizen vermeidet man Problem, die durch (näherungsweises) Kürzen der Streckendynamik entstehen können.

DNA-Entwurf - 3. Entwurf Kompensationsmatrizen

Konstante Kompensationsmatrix

- für sehr einfache Streckenmodelle: durch $G' = GK_c, K_c \in \mathbb{R}^{q\times p}$, **dreiecksförmiges** G' erreichen
- falls sich nicht für alle Frequenzen ausreichend schmale verallgemeinerte Gershgorinbänder ergeben:

  Wahl einer Frequenz $\bar{\omega}$ (meist nahe der gewünschten Durchtrittsfrequenz) und Minimierung des Radius' des verallg. Gershgorinkreises für diese Frequenz $\bar{\omega}$:

  $$\min_{Kc} \lambda_{PF}[C_V(G(j\bar{\omega})K_c]$$

  numerisch besser:

  $$\min_{Kc} \|C_V(G(j\bar{\omega})K_c]\|_F$$

Frobenius-Norm

DNA-Entwurf - 3. Entwurf Kompensationsmatrizen

Dynamische Kompensation

- für sehr einfache Streckenmodelle, Kompensation durch teilweise Invertierung der Strecke möglich
  ABER: K_c muss realisierbar und stabil sein
- ansonsten allgemeiner Ansatz für K_c

$$K_c(s) := \begin{bmatrix} a_{11n_1}s^{n_1} + \dots a_{111} & \dots & a_{1pn_p}s^{n_p} + \dots a_{1p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1n_1}s^{n_1} + \dots a_{q11} & \dots & a_{qpn_p}s^{n_p} + \dots a_{qp_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{P1}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{Pp}(s) \end{bmatrix}^{-1}$$

mit

$$\min_{a_{ik}} \sum_{i=1}^{N} w(\omega_i)\|C_V(G(j\omega_i))K_c(j\omega_i)\|_F$$

- $w(\omega_i)$ bezeichnet Gewichtungen/relative Wichtigkeit schmaler verallgemeinerter Gershgorin-Bänder im Frequenzbereich $\omega_1, \cdots, \omega_N$

Anmerkung: Je komplizierter K_c desto warscheinlicher, dass unerwünschte Pol-/Nullstellenkürzungen auftreten.
$\rightarrow$ Wahl der Polynomgrade möglichst klein!

Literatur

- J. Raisch: Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich. R. Oldenbourg Verlag, 1994.
- J. Maciejowski: Multivariable Feedback Design. Addison Wesley, 1989.

Frobenius-Norm

Die Frobenius-Norm einer $m \times n$-Matrix A ist definiert als:

$$\|A\|_F := \sqrt{\mathrm{Spur}(A^* A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2[A]},$$

A^* bezeichnet die adjungierte Matrix zu A und $\sigma_i[A]$ die Singulärwerte von A.