

Praktikum Grundlagen der Regelungstechnik

Versuch 2a: Winkelregelung eines invertierten Pendels Behrang Monajemi Nejad

1 Einführung

Dieser Laborversuch beschäftigt sich mit der Regelung eines nichtlinearen Systems, das am Arbeitspunkt eine instabile Ruhelage besitzt. Der Entwurf des Reglers erfolgt anhand des Wurzelortskurven- und Frequenzkennlinienverfahrens. Die Anwendung des letzteren Verfahrens setzt voraus, dass das Nyquistkriterium zur Stabilitätsprüfung bei instabilen Strecken beherrscht wird. Durch Anwendung des Nyquistkriteriums sind für den instabilen offenen Regelkreis Stabilitätsbedingungen im Bodediagramm herzuleiten.

2 Systembeschreibung

Das zu regelnde System besteht aus einem Pendelstab (Masse m_p , Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt J_S , Länge l , homogene Massenverteilung), der frei drehbar auf einem Wagen (Masse m_w) montiert ist. Der Winkel des Pendels zur Vertikalen sei φ . Der Wagen bewegt sich in der Horizontalen, seine Position wird mit z bezeichnet. Mit Hilfe eines Motors kann eine Kraft F auf den Wagen ausgeübt werden. Gemessen werden die Position des Wagens und der Pendelwinkel. Die Geschwindigkeit des Wagens sowie Winkelgeschwindigkeit werden numerisch aus den Positionsmessungen bestimmt und stehen ebenfalls zur Verfügung.

Die Regelungsaufgabe besteht darin, den Stab aufrecht stehend mittels des Wagens zu balancieren. Regelgröße ist der Winkel φ mit der Sollvorgabe von 0 Grad. Für den Wagen existiert bereits eine hochdynamische Geschwindigkeitsregelung, so dass als Stellgröße u für das Winkelregelungsproblem die Wagengeschwindigkeit \dot{z} verwendet werden soll.

Nachfolgend wird zunächst das mathematische Modell des Systems hergeleitet.

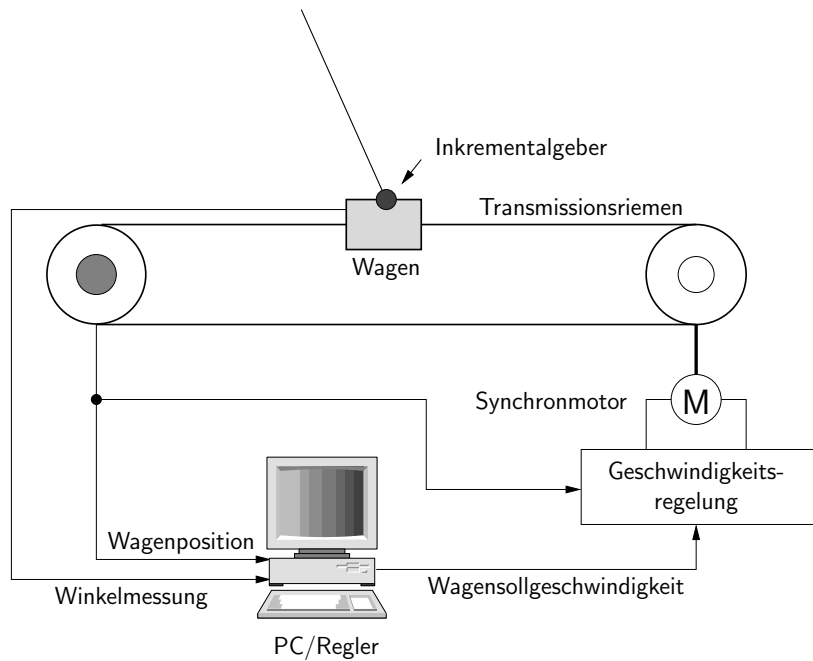


Abbildung 1: Schema des Versuchsaufbaus

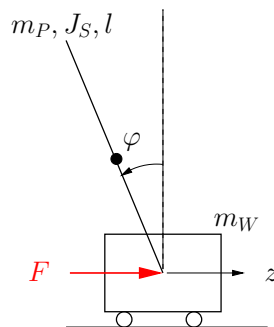


Abbildung 2: Skizze Einfachpendel

2.1 Freischneiden

Die Teilsysteme “Pendel” und “Wagen” werden nun getrennt betrachtet. Es müssen dann Schnittkräfte berücksichtigt werden, die vom Pendel auf den Wagen bzw. umgekehrt wirken. Es ergibt sich jeweils eine Schnittkraft vom Betrag F_{PW_h} und F_{PW_v} in horizontaler bzw. vertikaler Richtung (siehe Abb. 3).

Außer den Schnittkräften wirkt auf das Pendel die Gewichtskraft $m_P \cdot g$ im Schwerpunkt und das Reibmoment M_R .

2.2 Berechnung der Schnittkräfte

Um die Beträge der Schnittkräfte zu berechnen, wird das Newton'sche Gesetz für den Pendelschwerpunkt in x - und y -Richtung aufgestellt:

$$m_P \ddot{x}_S = F_{PW_h} \quad (1)$$

$$m_P \ddot{y}_S = F_{PW_v} - m_P g. \quad (2)$$

Für den Schwerpunkt des Pendels gilt aufgrund der mechanischen Bindung außerdem:

$$x_S = z - a \sin \varphi \quad (3)$$

$$y_S = a \cos \varphi. \quad (4)$$

Mit a wird dabei der Abstand zwischen Pendelachse und Pendelschwerpunkt bezeichnet. Gl. (3) und (4) werden zweimal abgeleitet:

$$\ddot{x}_S = \ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (5)$$

$$\ddot{y}_S = -a(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (6)$$

Setzt man die Gl. (1)-(2) in die Gl. (5)-(6) ein und löst nach den Schnittkräften auf, so erhält man:

$$F_{PW_h} = m_P(\ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)) \quad (7)$$

$$F_{PW_v} = m_P(g - a(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi)) \quad (8)$$

2.3 Bewegungsgleichung des Wagens

Die Bewegungsgleichung des Wagens in horizontaler Richtung ergibt sich aus dem Newton'schen Gesetz

$$m_W \ddot{z} = F - F_{PW_h} = F - m_P(\ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)), \quad (9)$$

bzw.

$$(m_W + m_P)\ddot{z} + m_P \cdot a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) = F. \quad (10)$$

2.4 Bewegungsgleichung des Pendels

Die Bewegungsgleichung des Pendels ergibt sich aus dem Drallsatz bzgl. dem Schwerpunkt

$$J_S \ddot{\varphi} = aF_{PW_h} \cos \varphi + aF_{PW_v} \sin \varphi - M_R. \quad (11)$$

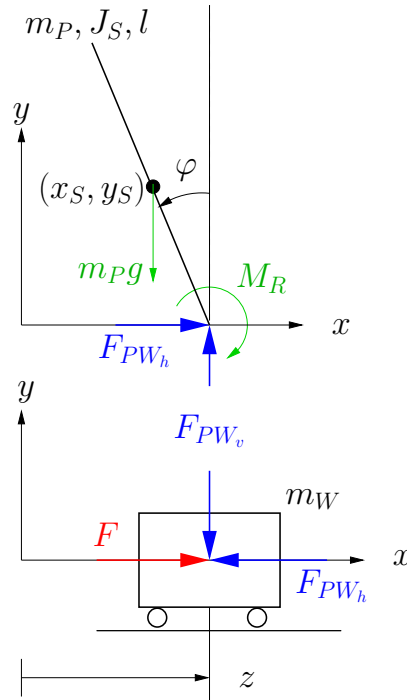


Abbildung 3: Freischneiden

Mit den Schnittkräften aus Gl. (7) und (8) sowie dem durch die Reibung verursachten Drehmoment $M_R = c \cdot \dot{\varphi}$ folgt

$$J_S \ddot{\varphi} = m_P \cdot a \left[\cos \varphi (\ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)) + \sin \varphi (g - a(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi)) \right] - c \cdot \dot{\varphi}. \quad (12)$$

Umgeformt ergibt sich

$$J_S \ddot{\varphi} = m_P a \left(\ddot{z} \cos \varphi + a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi - a \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi + g \sin \varphi - a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi - a \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi \right) - c \cdot \dot{\varphi}, \quad (13)$$

nach weiterer Zusammenfassung erhält man

$$(J_S + m_P a^2) \ddot{\varphi} = m_P a (\ddot{z} \cos \varphi + g \sin \varphi) - c \dot{\varphi}. \quad (14)$$

2.5 Gesamtsystem mit Geschwindigkeit als Eingang

Nimmt man nun als Stellgröße u die geregelte Geschwindigkeit \dot{z} an, so ergibt sich folgendes Systemmodell:

$$\dot{z} = u \quad (15)$$

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{du}{dt} \quad (16)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J_S + m_P a^2} (m_P a (\ddot{z} \cos \varphi + g \sin \varphi) - c \dot{\varphi}) \quad (17)$$

Die folgenden Systemparameter sind gegeben:

m_P	0,3475 kg	Masse des Pendelstabs
a	0,459 m	Distanz Drehachse - Pendelschwerpunkt
c	$\approx 0,007\text{Nms}$	Reibungskoeffizient
J_S	$3,4 \cdot 10^{-2}\text{Nms}^2$	Trägheitsmoment bezüglich Schwerpunkt

Tabelle 1: Parameter Einfachpendel

3 Versuchsvorbereitung

Die Aufgaben der Versuchsvorbereitung sind bis zum 30. Mai zu lösen. Am 30. Mai findet ein schriftlicher Test im Raum EN 223 statt. Des Weiteren wird an diesem Termin die Versuchsdurchführung diskutiert.

3.1 Linearisierung

Linearisieren Sie das nichtlineare Modell um die Ruhelage $(z, \varphi) = (0, 0)$ und berechnen Sie die Transferfunktion von der Stellgröße u zum Ausgang φ . Skizzieren Sie die Pol-/Nullstellenverteilung des Systems.

3.2 Wurzelortskurve

Machen Sie sich mit den Konstruktionsregeln für Wurzelortskurven vertraut!

Gegeben sei der folgende Regler

$$G_r(s) = K \frac{s + \alpha}{s + \beta}, \quad K, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (18)$$

mit $K > 0$. Entscheiden Sie anhand des Wurzelortskurvenverfahrens über die notwendige Lage der Reglerpolstelle und -nullstelle, damit das geregelte System für eine genügend große Verstärkung K stabilisiert werden kann. Bestimmen Sie nur, in welcher Hälfte der s-Ebene jeweils die Pol- und die Nullstelle liegen muss und nicht die genaue Position.

3.3 Nyquistkriterium

Machen Sie sich mit dem allgemeinen Nyquistkriterium vertraut! Skizzieren Sie mit der zuvor bestimmten Pol-/Nullstellenverteilung des Reglers das Nyquistdiagramm des offenen Regelkreises. Gegebenenfalls kann eine konkrete Realisierung des Reglers angenommen werden, um das Nyquistdiagramm zeichnen zu können. Welche Bedingungen werden nach dem Nyquistkriterium an die Ortskurve der offenen Kette hinsichtlich der Stabilität gestellt und wie kann man dieses Bedingungen im Bodediagramm wiederfinden?

3.4 Frequenzkennlinienentwurf

Bestimmen Sie die Reglerparameter α , β und K so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Stabilität des Regelkreises,
- Amplitudenreserve von -4 dB, d.h., (mindestens) 4 dB Abstand zur Stabilitätsgrenze,
- Phasenreserve von mindestens 5° ,
- Durchtrittsfrequenz von 5 rad/s ($\forall f > 5 \text{ rad/s}$ ist der Amplitudengang des offenen Kreises kleiner 0 dB).
- Die Dämpfung des offenen Kreises soll bei 220 rad/s (35 Hz) mindestens -42 dB betragen, um Anregungen der Eigenfrequenz des Pendelstabes zu vermeiden.

Hinweis: Führen Sie den Reglerentwurf rechnergestützt in Scilab durch! Achten Sie darauf, dass Bodediagramme mit der Frequenz in [rad/s] darzustellen sind. Mittels der Scilab-Befehle `repfreq` und `phasemag` (oder `dbphi`) können Amplituden- und Phasengang berechnet werden (Siehe die Folien der Scilab-Einführung). Verwenden Sie geeignete Hilfsmittel wie Linien im Bodediagramm zur leichteren Beurteilung des Reglerentwurfs.

3.5 Störverhalten

Untersuchen Sie das Verhalten des Regelkreises bei konstanten Ausgangsstörungen (z.B. durch Messfehler oder Wagen auf geneigter Ebene). Wie verhalten sich Wagenposition, Winkel und Wagengeschwindigkeit?

3.6 Führungsverhalten

Untersuchen Sie das Verhalten des Regelkreises gegenüber konstanten Sollvorgaben ungleich Null. Wie verhalten sich Wagenposition, Winkel und Wagengeschwindigkeit?

4 Versuchsdurchführung

1. Implementieren Sie das nichtlineare Pendelmodell aus Abschnitt 2.5 in Scicos zusammen mit ihrem Regler.
2. Simulieren Sie das Systemverhalten für verschiedene Anfangslagen des Pendelstabes. Starten Sie mit 0° . Erhöhen Sie den Anfangswinkel in Schritten von $2,5^\circ$. Bis zu welchem Anfangswinkel stabilisiert ihr Regler die Ruhelage (Einzugsbereich)?

3. Vergleichen Sie die Wagenbewegungen und Stellgrößenverläufe aus den Simulationen mit dem vorhandenen technischen Beschränkungen am Versuchsstand.
4. Implementieren Sie ihren Regler am Versuchsstand und testen Sie den Regler. Hinweis: Ein Aufschwingregler bringt den Pendelstab automatisch in den Einzugsbereich ihres Reglers.
5. Geben Sie mittels eines Potentiometers von Null verschiedene Sollwerte für den Pendelwinkel im Bereich von $\pm 2^\circ$ vor.
6. Speichern Sie die Daten von einem erfolgreichen Versuchsdurchgang ab und übergeben Sie eine Kopie der Datei dem/r Versuchsbetreuer/in.

5 Auswertung und Diskussion

1. Beschreiben und diskutieren Sie das Regelkreisverhalten!
2. Vergleichen Sie die experimentellen Ergebnisse mit denen der Simulation!
3. Erweitern Sie das Scilab-Skript, das Sie für die Simulation geschrieben haben, um eine Routine, die aus den gespeicherten Versuchsdaten aussagekräftige Plots generiert, die Sie in Ihr Protokoll einbinden!