

Aufschwingen eines invertierten Pendels: Energiebasierter Reglerentwurf

Versuch Nr. 2

Version der Versuchsbeschreibung: 1.0 (9. Mai 2007)

Praktikum - Nichtlineare Regelsysteme - Sommersemester 2007

Thomas Schauer

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
2 Versuchsaufbau und Herleitung der Bewegungsgleichungen	1
2.1 Freischneiden	2
2.2 Berechnung der Schnittkräfte	2
2.3 Bewegungsgleichung des Wagens	3
2.4 Bewegungsgleichung des Pendels	3
2.5 Gesamtsystem mit Beschleunigung als Eingang	4
3 Energiebetrachtungen	4
4 Vorbereitungsaufgaben	4
5 Praktische Versuchsdurchführung	5
6 Hinweise zur praktischen Durchführung des Versuchs	5

1 Einführung

In diesem Laborversuch soll ein invertiertes Pendel auf einem Wagen mittels eines nichtlinearen Reglers aufgeschwungen werden. Der Ausgang des Reglers ist die Beschleunigung des Wagens. Am Versuchsstand lässt sich jedoch nur die Wagen-geschwindigkeit als Eingangssignal vorgeben, so dass eine Integration der Reglerausgangsgröße Beschleunigung erforderlich ist. Die dann berechnete Wangengeschwindigkeit wird über eine hochdynamische kommerzielle Servoregelung realisiert. Der Entwurf des Aufschwingreglers basiert auf energetischen Betrachtungen und der Lyapunov-Stabilitätstheorie. Sobald der Aufschwingregler den Pendelstab genügend nahe an die instabile Ruhelage gebracht hat, soll ein linearer Regler aktiviert werden, der das Pendel an der instabilen Ruhelage stabilisiert. Der lineare Regler in Form einer Transferfunktion und dessen Einzugsbereich sind vorgegeben.

2 Versuchsaufbau und Herleitung der Bewegungsgleichungen

Das System besteht aus einem Pendelstab (Masse m_P , Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt J_S , Länge l , homogene Massenverteilung), der frei drehbar auf einem Wagen (Masse m_W) montiert ist. Der Winkel des Pendels zur Vertikalen sei φ . Der Wagen bewegt sich in der Horizontalen, seine Position wird mit z bezeichnet. Mit Hilfe eines Motors kann eine Kraft

F auf den Wagen ausgeübt werden. Gemessen werden die Position des Wagens und der Pendelwinkel. Die Geschwindigkeit des Wagens sowie Winkelgeschwindigkeit werden numerisch aus den Positionsmessungen bestimmt und stehen ebenfalls zur Verfügung.

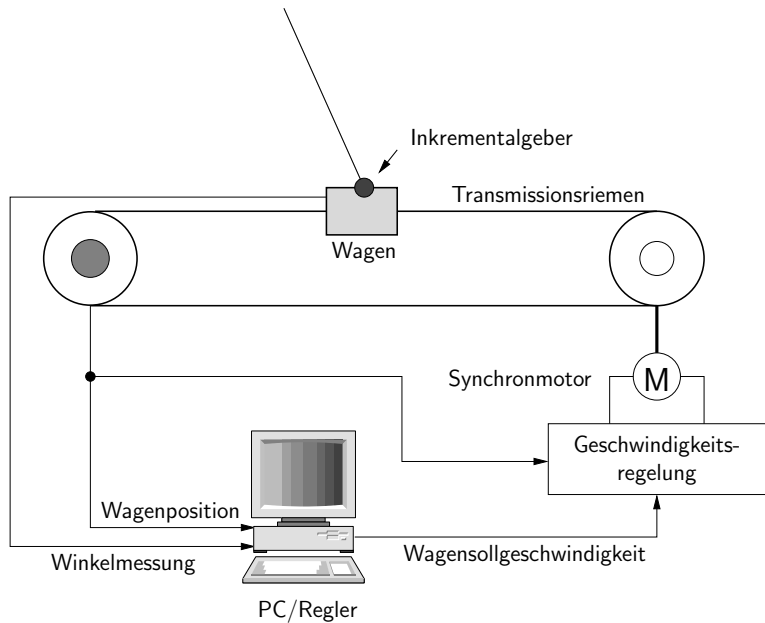


Abbildung 1: Schema des Versuchsaufbaus

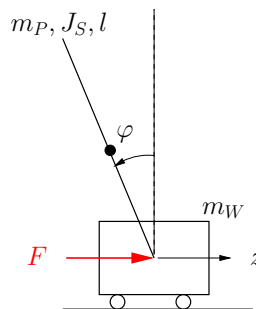


Abbildung 2: Skizze Einfachpendel

2.1 Freischneiden

Die Teilsysteme “Pendel” und “Wagen” werden nun getrennt betrachtet. Es müssen dann Schnittkräfte berücksichtigt werden, die vom Pendel auf den Wagen bzw. umgekehrt wirken. Es ergibt sich jeweils eine Schnittkraft vom Betrag F_{PW_h} und F_{PW_v} in horizontaler bzw. vertikaler Richtung (siehe Abb. 3).

Außer den Schnittkräften wirkt auf das Pendel die Gewichtskraft $m_P \cdot g$ im Schwerpunkt und das Reibmoment M_R .

2.2 Berechnung der Schnittkräfte

Um die Beträge der Schnittkräfte zu berechnen, wird das Newton’sche Gesetz für den Pendelschwerpunkt in x - und y -Richtung aufgestellt:

$$m_P \ddot{x}_S = F_{PW_h} \quad (1)$$

$$m_P \ddot{y}_S = F_{PW_v} - m_P g. \quad (2)$$

Für den Schwerpunkt des Pendels gilt aufgrund der mechanischen Bindung außerdem:

$$x_S = z - l \sin \varphi \quad (3)$$

$$y_S = a \cos \varphi. \quad (4)$$

Mit a wird dabei der Abstand zwischen Pendelachse und Pendelschwerpunkt bezeichnet. Gl. (3) und (4) werden zweimal abgeleitet:

$$\ddot{x}_S = \ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (5)$$

$$\ddot{y}_S = -a(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) \quad (6)$$

Setzt man die Gl. (1)-(2) in die Gl. (5)-(6) ein und löst nach den Schnittkräften auf, so erhält man:

$$F_{PW_h} = m_P(\ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)) \quad (7)$$

$$F_{PW_v} = m_P(g - a(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi)) \quad (8)$$

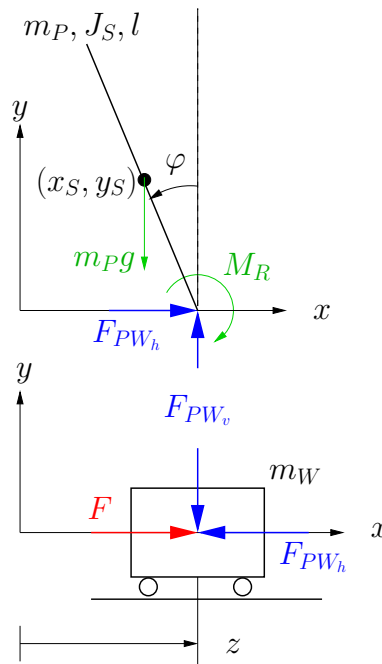


Abbildung 3: Freischnitten

2.3 Bewegungsgleichung des Wagens

Die Bewegungsgleichung des Wagens in horizontaler Richtung ergibt sich aus dem Newton'schen Gesetz

$$m_W \ddot{z} = F - F_{PW_h} = F - m_P(\ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)), \quad (9)$$

bzw.

$$(m_W - m_P)\ddot{z} + m_P \cdot a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) = F. \quad (10)$$

2.4 Bewegungsgleichung des Pendels

Die Bewegungsgleichung des Pendels ergibt sich aus dem Drallsatz bzgl. dem Schwerpunkt

$$J_S \ddot{\varphi} = aF_{PW_h} \cos \varphi + aF_{PW_v} \sin \varphi - M_R. \quad (11)$$

Mit den Schnittkräften aus Gl. (7) und (8) sowie dem durch die Reibung verursachten Drehmoment $M_R = c \cdot \dot{\varphi}$ folgt

$$J_S \ddot{\varphi} = m_P \cdot a \left[\cos \varphi (\ddot{z} + a(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)) + \sin \varphi (g - a(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi)) \right] - c \cdot \dot{\varphi}. \quad (12)$$

Umgeformt ergibt sich

$$J_S \ddot{\varphi} = m_P a (\ddot{z} \cos \varphi + a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi - a \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi + g \sin \varphi - a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \sin \varphi - a \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi) - c \cdot \dot{\varphi}, \quad (13)$$

nach weiterer Zusammenfassung erhält man

$$(J_S + m_P a^2) \ddot{\varphi} = m_P a (\ddot{z} \cos \varphi + g \sin \varphi) - c \dot{\varphi}. \quad (14)$$

2.5 Gesamtsystem mit Beschleunigung als Eingang

Nimmt man nun als Stellgröße u die geregelte Beschleunigung \ddot{z} an, so ergibt sich folgendes Systemmodell:

$$\ddot{z} = u \quad (15)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J_S + m_P a^2} (m_P a (u \cos \varphi + g \sin \varphi) - c \dot{\varphi}) \quad (16)$$

Die folgenden Systemparameter sind gegeben:

m_P	0,3475 kg	Masse des Pendelstabs
a	0.459 m	Distanz Drehachse - Pendelschwerpunkt
c	$\approx 0.007 \text{ Nms}$	Reibungskoeffizient
J_S	$3,4 \cdot 10^{-2} \text{ Nms}^2$	Trägheitsmoment bezüglich Schwerpunkt

Tabelle 1: Parameter Einfachpendel

3 Energiebetrachtungen

Die Energie des Pendelstabs ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + m_P g a (\cos \varphi - 1) \quad (17)$$

mit $J = J_S + m_P a^2$. Der erste Summand in (17) beschreibt die rotatorische Energie. Die potentielle Energie ist im zweiten Summanden erfasst (0 für aufrecht stehenden Stab, -2 für den senkrecht nach unten hängenden Stab). Die Gesamtenergie $E = 0$ entspricht der instabilen Zielruhelage.

4 Vorbereitungsaufgaben

Bitte lösen Sie die Vorbereitungsaufgaben sorgfältig und bringen Sie die mit Latex erstellten Ausarbeitungen inklusive kommentierten Programmen zur Versuchsdurchführung mit (Teil der Benotung). Alle verwendeten Scilab/Scicos-Dateien sind auf USB-Stick ebenfalls für die praktische Versuchsdurchführung bereitzuhalten.

1. Implementieren Sie das Pendelmodell mit der Eingangsgröße $u = \ddot{z}$ als *Computational Function* in Scicos.
2. Entwerfen Sie einen Regler, der die in Gl. (17) definierte Energie des Pendelstabes zu Null macht und somit den Pendelstab gezielt in die instabile Ruhelage befördert. Nehmen Sie zunächst an, dass die Reibung am Stab null ist ($c = 0$). Verwenden Sie als Startpunkt die Lyapunov-Funktion

$$V = \frac{1}{2} E^2. \quad (18)$$

Prinzipiell sind unendlich viele Regleransätze möglich. Entwerfen Sie einen möglichst einfachen stetigen Regler. Implementieren Sie den Regler in Scicos und simulieren Sie den Regler mit dem Modell ($c = 0$) in Scicos. Verwenden Sie für den Regler nur Standardblöcke aus den Paletten und keine *Computational Function* (erforderlich für die spätere Echtzeitimplementierung). Berücksichtigen Sie bei der Auslegung des Reglers, dass die mögliche Beschleunigung auf den Bereich $\pm 40 \text{ m/s}^2$ beschränkt ist. Die realisierbare Geschwindigkeit des Motors ist $\pm 3,5 \text{ m/s}$, der maximale Weg ist 2 m. Beurteilen Sie neben dem Pendelverhalten auch das Verhalten des Wagens.

3. Untersuchen Sie das Regelkreisverhalten des zuvor entworfenen Aufschwingreglers, wenn die Reibung nicht vernachlässigt wird ($c \neq 0$).

Warum ist es sinnvoll, eine Lyapunov-Funktion

$$V = \frac{1}{2}(E - E_0)^2 \quad (19)$$

anzusätzen, wobei $E_0 < 0$ die neue Zielenergie ist, die als Entwurfsparameter betrachtet werden kann? Hinweis: Finden Sie wieder einen Regler, der V zu Null macht und somit E gegen E_0 gehen lässt. Simulieren Sie den Regelkreis mit dem neuen Regler und dem reibungsbehafteten System.

4. Bisher wurde nur das Aufschwingen des Pendels beim Reglerentwurf betrachtet, jedoch nicht die Wagenposition. Ergänzen Sie den Regler aus Teilaufgabe 3 um einen linearen Zustandsregler, der die Wagenposition und -geschwindigkeit auf Null regelt. Finden Sie simulativ geeignete Verstärkungen!
5. Machen Sie sich Gedanken, wie man in Scicos praktisch vom Aufschwingregler auf den stabilisierenden linearen Regler umschalten kann, sobald man im Einzugsbereich des linearen Reglers ist. Der Einzugsbereich wird durch ein Winkel- und Winkelgeschwindigkeitsintervall definiert. Der stabilisierende Regler ist als Transferfunktion gegeben und verwendet nur die Winkelmessung (Hinweis: nur Standardblöcke verwenden).

5 Praktische Versuchsdurchführung

Implementieren Sie in Scicos den Aufschwingregler aus der Versuchsvorbereitung (Teilaufgabe 4) zusammen mit dem linearen stabilisierenden Regler, wobei eine automatische Umschaltung erfolgen soll. Testen Sie diese Regelung praktisch. Während des Laborversuches werden Sie mit der Echtzeitumgebung RTAI und XRTAI-LAB vertraucht gemacht.

6 Hinweise zur praktischen Durchführung des Versuchs

Drucken aller Simulations- und Messergebnisse! Login: student, Passwort: rslab, Verzeichnis: /home/student/pendel